

Opción A

1.- Dada la función $f(x)$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & (x \leq 1) \\ -x^2 + nx & (x > 1) \end{cases}$ se pide:

a) Calcular los valores de los parámetros m y n para que sea continua y derivable en todos los puntos del intervalo $[-20, 20]$

b) Dibujar esquemáticamente la gráfica de la función, señalando los extremos

a)

Continuidad

$$\begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1^2 - 5 \cdot 1 + m = m - 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1^2 + n \cdot 1 = n - 1 \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = m - 4 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = n - 1 \Rightarrow m - n = 3$$

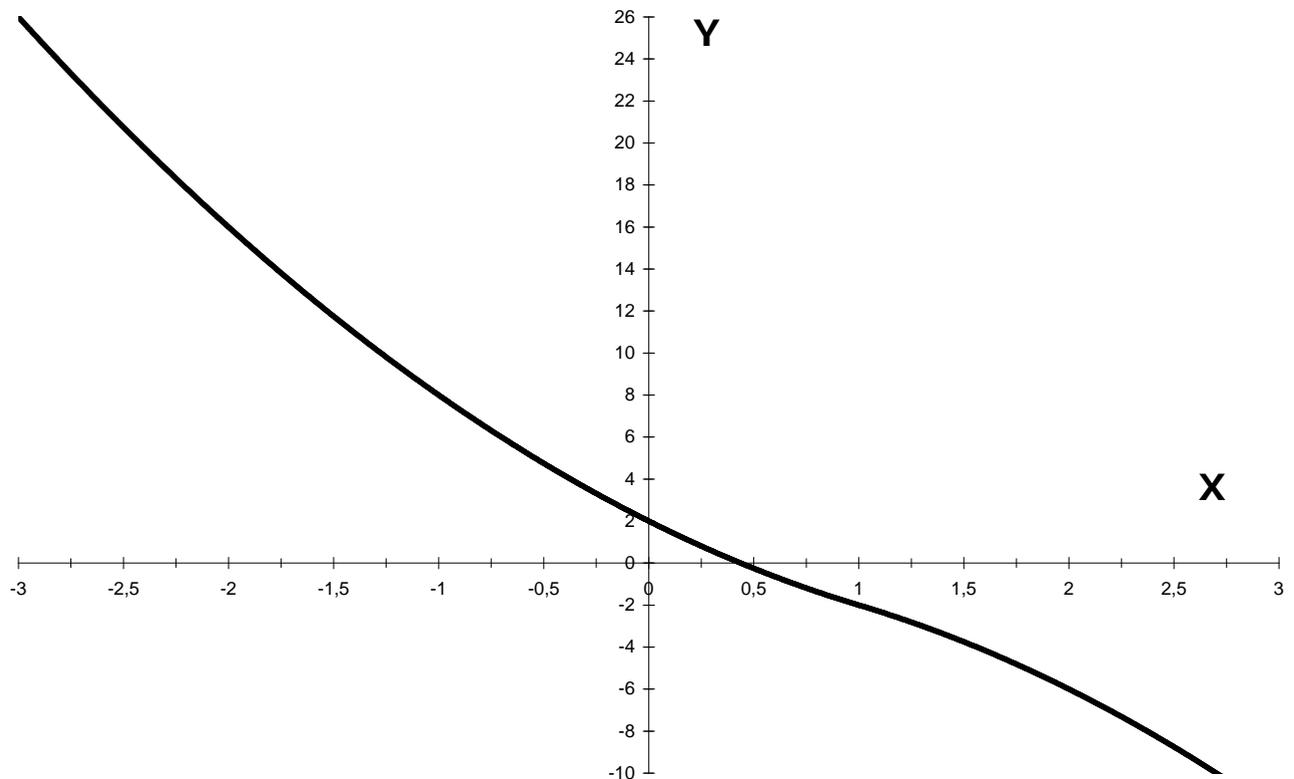
Derivable

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & (x < 1) \\ -2x + n & (x > 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 2 \cdot 1 - 5 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -2 \cdot 1 + n = n - 2 \end{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -3 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = n - 2 \Rightarrow n = -1$$

$$m - (-1) = 3 \Rightarrow m = 2$$

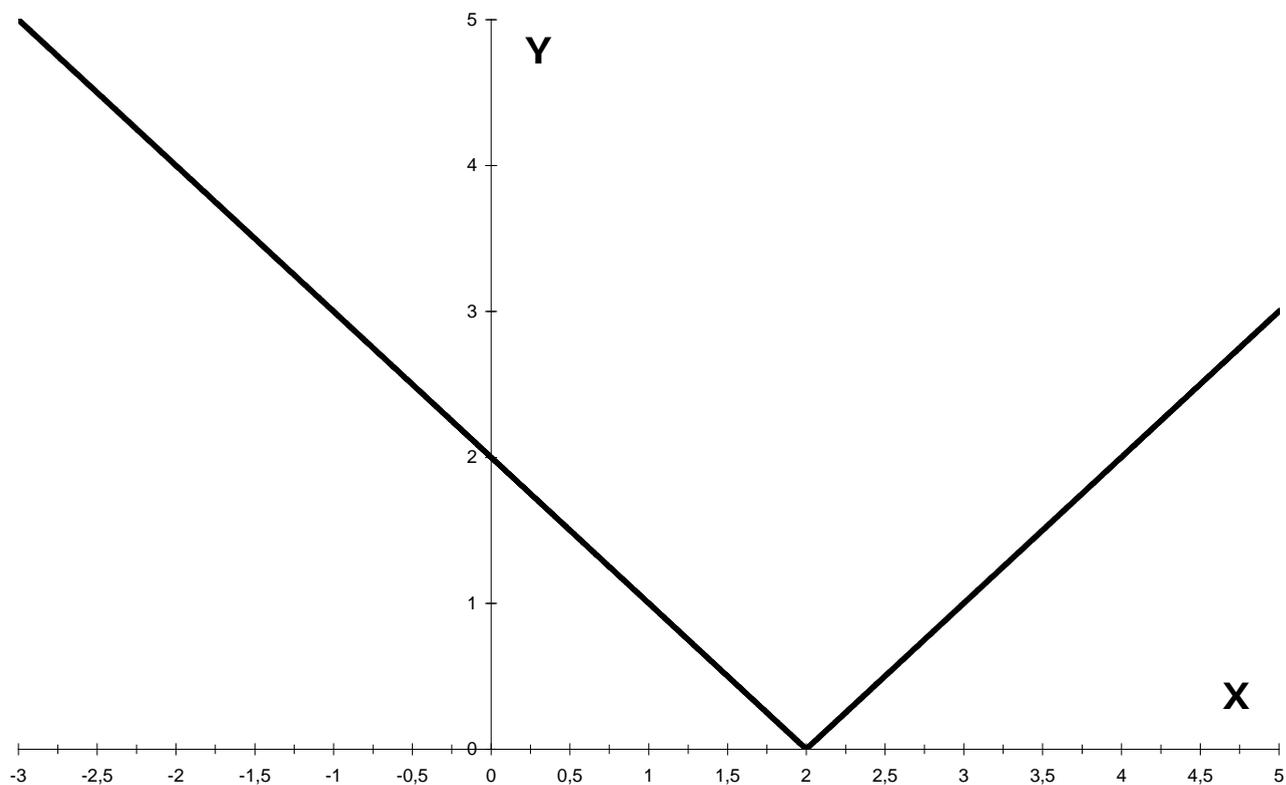
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 2 & (x \leq 1) \\ -x^2 - x & (x > 1) \end{cases}$$

b)



2.- Representar gráficamente la función $g(x) = |x - 2|$ y hallar el área limitada por su gráfica, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = -1$ y $x = 3$

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



$$A = \int_{-1}^2 (-x + 2) dx + \int_2^3 (x - 2) dx = -\frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-1}^2 + 2 \cdot [x]_{-1}^2 + \frac{1}{2} \cdot [x^2]_2^3 - 2 \cdot [x]_2^3$$

$$A = -\frac{1}{2} \cdot [2^2 - (-1)^2] + 2 \cdot [2 - (-1)] + \frac{1}{2} \cdot (3^2 - 2^2) - 2 \cdot (3 - 2) = -\frac{1}{2} \cdot (4 - 1) + 2 \cdot (2 + 1) + \frac{1}{2} \cdot (9 - 4) - 2 \cdot 1$$

$$A = -\frac{3}{2} + 2 \cdot 3 + \frac{5}{2} - 2 = 4 + \frac{2}{2} = 5 u^2$$

3.- Resolver razonadamente el siguiente sistema, donde **A** y **B** son matrices desconocidas ¿de

$$\text{que tamaño serán?: } \begin{cases} 3A + 2B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{cases}$$

El tamaño de **A** y **B** es **2 x 2**

$$\begin{cases} 9A + 6B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ 4A - 6B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 13A = \begin{pmatrix} 24 & 9 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 26 & 13 \\ 13 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6A + 4B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ -6A + 9B = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 13B = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 3 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Decidir si el plano $x + y + z = 1$ también viene dado por la ecuación paramétrica

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \lambda - \mu \\ y = \frac{1}{2} + \lambda - \mu \\ z = 2\mu \end{cases}$$

Con los datos de la ecuación paramétrica calcularemos la ecuación del plano y compararemos

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x - \frac{1}{2} & y - \frac{1}{2} & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) + z + z + 2 \left(y - \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow 2x - 1 + 2z + 2y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$2x + 2y + 2z - 2 = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y + z = 1 \Rightarrow$ Son iguales ecuación implícita y paramétrica son expresiones del mismo plano

Opción B

1.- Dada la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ determinar los valores de **a**, **b** y **c** sabiendo que la gráfica de **f(x)** pasa por los puntos **(0, 3)** y **(1, 4)** y que la recta **y = 4** es tangente a dicha gráfica cuando **x = 1**

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3 \Rightarrow c = 3 \\ f(1) = 4 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 = 4 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow -a = 1 \Rightarrow a = -1 \\ f'(1) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \end{cases}$$

$$-1 + b = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

2.- Hallar las dimensiones (altura **h** y radio de la base **r**) de un cono recto de volumen máximo, sabiendo que la altura mas el radio de la base vale **12 m**. [Nota: El Volumen del cono es

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h]$$

$$\begin{cases} 12 = h + r \Rightarrow h = 12 - r \\ V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \end{cases} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 (12 - r) = \frac{1}{3} \pi (12r^2 - r^3) \Rightarrow V' = \frac{dV}{dr} = \frac{1}{3} \pi (24r - 3r^2) \Rightarrow$$

$$V' = \frac{dV}{dr} = \frac{3}{3} \pi (8r - r^2) = \pi (8r - r^2) \Rightarrow V' = 0 \Rightarrow \pi (8r - r^2) = 0 \Rightarrow 8r - r^2 = 0 \Rightarrow (8 - r)r = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 0 \\ 8 - r = 0 \Rightarrow r = 8 \end{cases} \Rightarrow V'' = \frac{d^2V}{dr^2} = \pi (8 - 2r) = 2\pi (4 - r) \Rightarrow \begin{cases} V''(0) = 2\pi (4 - 0) = 8\pi > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \\ V''(8) = 2\pi (4 - 8) = -8\pi < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} r = 8 \text{ m.} \\ h = 12 - 8 = 4 \text{ m.} \end{cases}$$

3.- Se considera la matriz cuadrada $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar el valor del parámetro **k** para que el

determinante $|M^2 - kM|$ sea nulo.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M^2 - k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2-k \\ -2+k & 3-2k \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|M^2 - kM| = \begin{vmatrix} -1 & 2-k \\ -2+k & 3-2k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(3-2k) - (2-k)(k-2) = 0 \Rightarrow -3 + 2k - (2k - 4 - k^2 + 2k) = 0 \Rightarrow$$

$$-3 + 2k - 4k + 4 + k^2 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0 \geq 0 \Rightarrow k = \frac{2}{2} = 1$$

4.- Calcular el valor de **a** para que los cuatro puntos siguientes estén en un mismo plano **(1, 0, 0)**, **(0, 1, 0)**, **(0, 0, 1)** y **(1, 1, a)**,

Nominando a los puntos **A**, **B**, **C** y **D** respectivamente calcularemos la ecuación del plano π que contenga a los tres primeros, para ello hallaremos los vectores **AB**, **AC** y **AG** siendo **G** el punto genérico del plano, estos tres vectores son coplanarios (contenidos en el mismo plano) siendo el último vector combinación lineal de los otros dos y por ello el determinante de la matriz que forman los tres es nulo y la ecuación del plano buscado.

Una vez obtenido el plano calcularemos el parámetro pedido para que el punto **D** pertenezca a él

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (1, 0, 0) = (x-1, y, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-1+z+y=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$$

Hagamos que el punto **D** pertenezca al plano $\pi \Rightarrow 1+1+a-1=0 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$